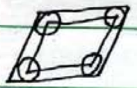
题目：给定矩形网格，横纵间距分别为 a, b，现随机投一个椭圆，长短轴分别为 r, kr （$k \geq 1$，$2kr < \max\{a, b\}$）。求椭圆完全含在某个矩形内的概率 $P(a,b,k,r)$

解答：

(1). 先考察圆的情形，易知对于间距分别为 d_1, d_2 的平行四边形网格，



不论夹角多小，圆完全含于某个平行四边形内的概率为：

$$P(d_1,d_2,r) = \frac{(d_1-2r)(d_2-2r)}{d_1 d_2}$$

(2). 对椭圆的情形，作变换转化为圆来计算。

可知椭圆出现的随机性体现在 1° 中心位置均匀分布，2° 旋转角度 θ 均匀分布。现单对固定的 θ，作变换：

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{k^2r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$ $\qquad x'^2+y'^2=r^2$

网格方程为

$$\begin{cases} y = tx+s_1 \\ y = tx+s_2 \\ y = -\frac{1}{t}x+s_1' \\ y = -\frac{1}{t}x+s_2' \end{cases} \xrightarrow[\begin{cases} y'=y \\ x'=\frac{x}{k}\end{cases}]{\text{变换}} \begin{cases} y' = tkx'+s_1 \\ y' = tkx'+s_2 \\ y' = -\frac{k}{t}x'+s_1' \\ y' = -\frac{k}{t}x'+s_2 \end{cases}$$

$t=\tan\theta$

（矩形网格） （平行四边形网格）

由(1) 只需计算平行四边形网格的网格间距：

$$\frac{|s_1-s_2|}{\sqrt{1+t^2}} = a \qquad \qquad \frac{|s_1-s_2|}{\sqrt{1+t^2k^2}} = d_1$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{|s_1'-s_2'|}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = b \qquad \qquad \frac{|s_1'-s_2'|}{\sqrt{1+(\frac{k}{t})^2}} = d_2$$

故：$d_1 = \frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2k^2}}$，$d_2 = \frac{b\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{\sqrt{1+\frac{k^2}{t^2}}} = \frac{b\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{k^2+t^2}}$

代入(1)的公式 $P_\theta(d_1,d_2,r) = \frac{(d_1-2r)(d_2-2r)}{d_1 d_2}$

$$= \frac{\left(\frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2k^2}}-2r\right)\left(\frac{b\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{k^2+t^2}}-2r\right)}{\frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+k^2t^2}}\cdot\frac{b\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{k^2+t^2}}}$$

$$= \frac{\left(a\sqrt{1+t^2}-2r\sqrt{1+k^2t^2}\right)\left(b\sqrt{1+t^2}-2r\sqrt{k^2+t^2}\right)}{ab\sqrt{1+t^2}}$$

$$\xlongequal[0<\theta<\frac{\pi}{2}]{t=\tan\theta} \frac{\left(a\sec\theta-2r\sqrt{1+k^2\tan^2\theta}\right)\left(b\sec\theta-2r\sqrt{k^2+\tan^2\theta}\right)}{ab\sec^2\theta}$$

现在回到概率的计算上，利用全概率公式：

$$p(A) = \sum_i p(A|B_i)\,p(B_i)$$

其中A为题目中所述事件，B_i对应角度为θ~~时~~的情形

因而

$$p(a,b,k,r) = \int_0^{2\pi} p_\theta(d_1,d_2,r)\cdot\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} p_\theta(d_1,d_2,r)\,d\theta \xlongequal{\text{对称性}} \frac{1}{2\pi}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} p_\theta(d_1,d_2,r)\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(a\sec\theta-2r\sqrt{1+k^2\tan^2\theta}\right)\left(b\sec\theta-2r\sqrt{k^2+\tan^2\theta}\right)}{ab\sec^2\theta}\,d\theta$$

完毕.

(3).检验一下结论对不对

取$k=1$，是圆的情形.

$$p(a,b,1,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a\sec\theta-2r\sec\theta)(b\sec\theta-2r\sec\theta)}{ab\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a-2r)(b-2r)}{ab}\,d\theta = \frac{(a-2r)(b-2r)}{ab}$$. 正确.

取$k=0$，是"针"的情形.

$$p(a,b,0,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a\sec\theta-2r)(b\sec\theta-2r)}{ab\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$= \cdots = 1-\frac{4(a+b)r-4r^2}{\pi ab} \xlongequal[2r=l]{} 1-\frac{2l(a+b)-l^2}{\pi ab}$$ 正确

(4) 化简一下公式.

$$p(a,b,k,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a\sec\theta-2r\sqrt{1+k^2\tan^2\theta})(b\sec\theta-2r\sqrt{k^2+\tan^2\theta})}{ab\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a-2r\sqrt{k^2\sin^2\theta+\cos^2\theta})(b-2r\sqrt{\sin^2\theta+k^2\cos^2\theta})}{ab}\,d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{2r}{b}\sqrt{k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}-\frac{2r}{a}\sqrt{\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta}+\frac{4r^2}{ab}\sqrt{(\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta)(k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right]d\theta$$

$$=1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{2r}{b}+\frac{2r}{a}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{k^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{4r^2}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sim}\,d\theta$$

$$1-p(a,b,k,r)=\frac{4r(a+b)}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{k^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta-\frac{8r^2}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sim}\,d\theta$$

$$(\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta)(k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)=k^2+(k^2-1)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=k^2+\left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2\sin^2 2\theta$$

注. 可知要求 $p(a,b,k,r)$, 需要计算两个椭圆积分, 不再继续往下化简了.

(5). 问题推广.

1°. 矩形网格改为平行四边形网格.

只需在第(2)步中网格方程中加入~~解出~~一个变量, 方法仍然可行.

2°. 争对圆的情形, 若网格不是平行四边形, (1)的讨论怎么计算.

如在一个椭圆形桌面上随机投硬币, 问硬币完全落在桌面上的概率.

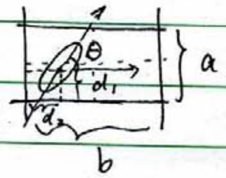
△ 相似图形?

3°. 在2°的情况中, 将圆改为椭圆呢.

4°. 在原题目中, 将椭圆改为一个凸图形呢?

5°. …

(6). 另一种方式. 采用几何概型计算方法.



$$\Omega = \{(\theta, d_1, d_2) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le d_1 \le \frac{a}{2},\ 0 \le d_2 \le \frac{b}{2}\}$$

$$|\Omega| = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{\pi ab}{2}$$

(设椭圆的方程为 ~~极坐标~~ $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, 且长轴较小)

(不相交)

$$A = \{(\theta, d_1, d_2) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ \frac{a}{2} \ge d_1 \ge \max\{\rho(\varphi)\sin(\theta+\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},\ \frac{a}{2} \ge d_2 \ge \max\{\rho(\varphi)\cos(\theta+\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}\}$$

$\to$ 记为 $\max_1(\theta)$

$\to$ 记为 $\max_2(\theta)$

$$\cancel{|\Omega| - |A| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\max_1(\theta)} dd_1 \int_0^{\max_2(\theta)} dd_2}$$

$$|A| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\max_1(\theta)}^{\frac{a}{2}} dd_1 \int_{\max_2(\theta)}^{\frac{b}{2}} dd_2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} - \max_1(\theta)\right)\left(\frac{b}{2} - \max_2(\theta)\right) d\theta$$

$$= \frac{\pi ab}{2} - \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \max_2(\theta)\, d\theta - \frac{b}{2}\int_0^{2\pi} \max_1(\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi} \max_1(\theta) \cdot \max_2(\theta)\, d\theta$$

对于 $\int_0^{2\pi} \max_1(\theta)\, d\theta$, $\int_0^{2\pi} \max_2(\theta)\, d\theta$ 可以采用"由Buffon投针想到的"中等式来计算。

但对于 $\int_0^{2\pi} \max_1(\theta) \cdot \max_2(\theta)\, d\theta$ 还需引出一个新的等式.

(7). 一点感想.

思考"名题"常能有新的收获，Buffon投针问题就是一个"名题"，虽然对它的研究也有很多结论了，比如"运动测度"就是一个以此为例的名词。

得到上面的公式得益于昨晚的讨论会，虽然以前也想过作变换将椭圆变为圆，但有些觉得不可行，经过昨晚的讨论，发现这还是可以做出结果的，这就是讨论的作用的一个例子吧！

2009. 12. 11. am.