随机微分方程入门
基于R语言的模拟与推断

陈堰平

ypchen_cos@yahoo.com.cn

中国人民大学　统计学院

Dec. 14, 2008

第一届中国R语言会议

Figure: Kiyoshi Itô(伊藤清, Itô Kiyoshi) (7 September , 1915 – 10 November, 2008) was a Japanese mathematician whose work is now called Itô calculus. The basic concept of this calculus is the Itô integral, and the most basic among important results is Itô's lemma. His theory is widely applied, for instance in financial mathematics.

讲座大纲

- 基本概念：
  - 随机过程、布朗运动、Itô积分、SDE ……
- SDE的数值解
- SDE的参数估计

随机过程

二元函数 $X(t,\omega)$ 是随机过程，其中 $\omega \in \Omega$．如果 $t \in \mathbb{N}$，则称该过程为离散时间过程；如果 $t \in \mathbb{R}^+$，则称连续时间过程. 我们通常把连续时间随机过程记作 $X = \{X_t, t \geq 0\}$.有时我们用 $X(t)$ 来表示 X_t．

- 对于固定的 ω，比如 $\bar{\omega}$， $\{X(t,\bar{\omega}), t \geq 0\}$（或离散情形下的 $\{X(n,\bar{\omega}), n \in \mathbb{N}\}$）被称作**路径**（*path*）或**轨迹**（*trajectory*）.
- 对于固定的 t，比如 $\bar{t}$，集合 $\{X(\bar{t},\omega), \omega \in \Omega\}$（或者离散情形下的 $\{X(\bar{n},\omega), \omega \in \Omega\}$）是时刻 $\bar{t}$ 该随机过程的状态集. $X(\bar{t},\omega)$ 就成了随机变量.

Brown 运动

Brown 运动又被称为 Wienner 过程。原指苏格兰生物学家 R. Brown 于 1827 年在显微镜下发现的花粉颗粒的不规则运动。以前都认为 Brown 运动的数学定义是 Einstein 首先于 1905 年提出的，但其实早在 1900年 Bachelier 就在他的博士论文中提出了 Brown 运动，并把 Brown 运动用在股票价格的研究。

标准 Brown 运动的数学性质

设连续时间随机过程 $W_t : 0 \leq t < T$ 是 $[0, T)$ 上的标准 Brown 运动，

- $W_0 = 0$
- **独立增量性**：对于有限个时刻 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$，随机变量

  $$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  是独立的
- **正态性**：对任意的 $0 \leq s < t < T$， $W_t - W_s$ 服从均值为0，方差为 $t - s$ 的正态分布

Brown 运动的模拟

设定 $W_0 = 0$. 对 $j = 1, 2, \ldots, N$， 做以下几步

- $t_j = t_{j-1} + \Delta t$
- 产生 $Z_j \sim N(0, 1)$
- $\Delta W_j = Z_j \sqrt{\Delta t}$
- $W_j = W_{j-1} + \Delta W_j$

```
set.seed(123)
N <- 100   # 时间[0,T]分隔的份数
T <- 1
Delta <- T/N # 时间间隔
W <- numeric(N+1)  # 初始化向量 W
t <- seq(0,T, length=N+1)
for(i in 2:(N+1))
        W[i] <- W[i-1] + rnorm(1) * sqrt(Delta)
plot(t,W, type="l", main="布朗运动" , ylim=c(-1,1))
```

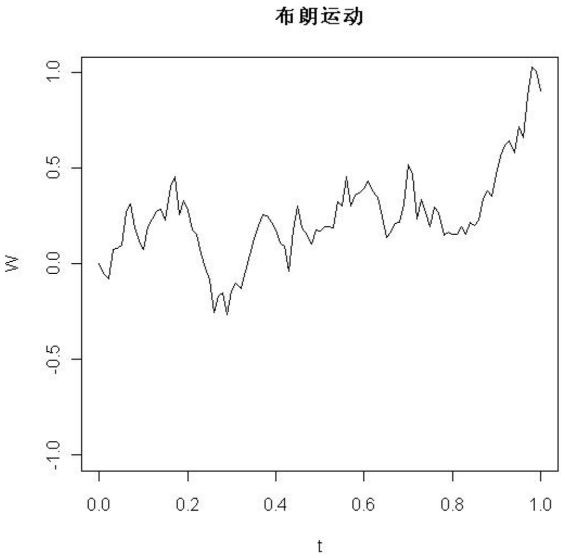


Figure: Brown 运动轨迹的模拟

Itô积分

假设 $\{X(t), 0 \le t \le T\}$ 是关于布朗运动生成的事件流适应的随机过程，满足 $\int_0^T \mathbb{E}(X(s)^2)\mathrm{d}s < +\infty$.则 X 的Itô积分定义为：

$$I_t(X) = \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = \lim_{\|\Pi_n\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

例如：

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \mathrm{d}W(s) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= W(t) - W(t_0) \end{aligned}$$

Itô 过程

随机过程 $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ 可以写成如下形式：

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s)\mathrm{d}s + \int_0^t h(s)\mathrm{d}W_s$$

其中 $g(t,\omega)$ 和 $h(t,\omega)$ 是两个适应过程，且满足

$$P\left\{\int_0^T |g(t,\omega)|\mathrm{d}t < \infty\right\} = 1 \quad \text{and} \quad P\left\{\int_0^T h(t,\omega)^2\mathrm{d}t < \infty\right\} = 1$$

则 $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ 被称为 Itô 过程

随机微分方程（以下简称 SDE）

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}W_s$$

通常写成微分形式

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t$$

有时也简写为

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t$$

$\mu(\cdot)$ 被称作漂移项，$\sigma(\cdot)$ 被称作扩散项

布朗运动：

$$\mathrm{d}X_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$

几何布朗运动：

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t$$

Ornstein-Uhlenbeck 过程（又名Vasicek过程）

$$\mathrm{d}W_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)\mathrm{d}t + \theta_3 \mathrm{d}W_t$$

$\theta_2 > 0$时该过程有均值反转（mean reverting）的性质。该方程也可以写成：

$$\mathrm{d}W_t = \theta(\mu - X_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$

Cox-Ingersoll-Ross 过程

$$\mathrm{d}W_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)\mathrm{d}t + \theta_3 \sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t$$

当$2\theta_1 > \theta_3^2$ 时，该过程严格取正值。方程也可以写成：

$$\mathrm{d}W_t = \theta(\beta - X_t)\mathrm{d}t + \sigma \sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t$$

SDE的解

如果SDE的漂移项$\mu(\cdot)$ 和扩散项 $\sigma(\cdot)$ 满足下面的条件：

- **全局 Lipschitz 条件：** 对于所有的 $x, y \in \mathbb{R}$ 和 $t \in [0, T]$，存在常数 $K < +\infty$ 使得

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| < K|x - y|$$

- **线性增长条件：**对于所有的 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t \in [0, T]$，存在常数 $C < +\infty$ 使得

$$|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| < C(1 + |x|)$$

则SDE存在唯一的、连续的强解使得：

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^T |X_t|^2 \mathrm{d}t\right\} < \infty$$

Brown 运动

$$\mathrm{d}X_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$

在给定初值 X_{t_0} 的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X_{t_0} + \mu(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0})$$

几何 Brown 运动

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t$$

在给定初值 X_{t_0} 的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X_{t_0} \exp\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0})\right]$$

假设 $X(t)$ 满足SDE：

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t$$

$f(X)$ 是 X 的函数，则

$$\mathrm{d}f(X) = f_X(X)\mathrm{d}X + \frac{1}{2}f_{XX}(\mathrm{d}X)^2$$

$(\mathrm{d}X)^2$展开时，有下面的法则：

$\times$	$\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}W$
$\mathrm{d}t$	0	0
$\mathrm{d}W$	0	$\mathrm{d}t$

Itô 引理的应用

假设 $X(t)$ 满足SDE：

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t$$

如何解出 $X(t)$？

设 $Y(t) = \log X(t)$，则 $\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{X}$， $\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = -\frac{1}{X^2}$，由Itô 引理得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y &= \frac{\partial Y}{\partial X}\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}(\mathrm{d}X_t)^2 \\
&= \frac{1}{X}(\mu X \mathrm{d}t + \sigma X \mathrm{d}W) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{X^2})\sigma^2 X^2 \mathrm{d}t \\
&= \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{d}t \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W
\end{aligned}$$

则 $Y(t)$ 是布朗运动，有

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= Y(t_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \\
X(t) &= \exp(Y(t)) \\
&= X(t_0)\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))\right]
\end{aligned}
$$

几何 Brown 运动的模拟

设定初始值为 X_0 .对 $j = 1, 2, \ldots, N$ ， 做以下几步

- $t_j = t_{j-1} + \Delta t$
- 产生 $Z_j \sim N(0, 1)$
- $\Delta W_j = Z_j \sqrt{\Delta t}$
- $X_j = X_{j-1} \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma \Delta W_j\right)$

```
set.seed(123)
mu <- 1
sigma <- 0.5
x <- 10
N <- 100   # [0,T]的分割点数
T <- 1
Delta <- T/N # 时间间隔
W <- numeric(N+1) # 初始化向量 W
t <- seq(0,T, length=N+1)
for(i in 2:(N+1))
        W[i] <- W[i-1] + rnorm(1) * sqrt(Delta)
S <- x * exp((mu-sigma^2/2)*t + sigma*W)
plot(t,S,type="l",main="几何布朗运动")
```

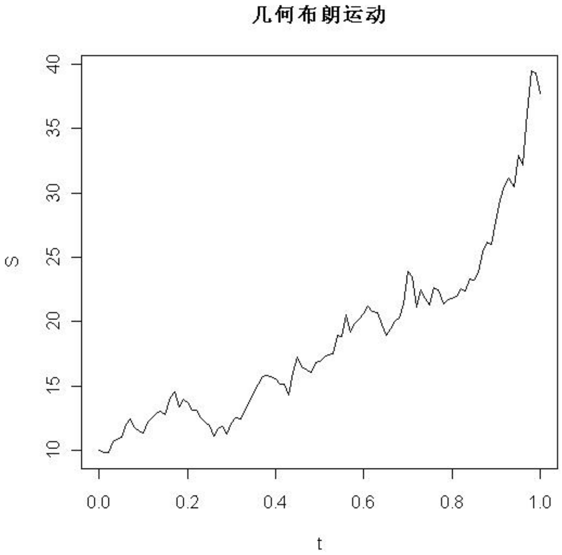


Figure: 几何 Brown 运动轨迹的模拟

SDE 的数值解

并不是所有的 SDE 都能解出显式解，更多的 SDE 只能通过迭代式求出数值解. 求 SDE 数值解也就是模拟出解的路径.

Euler 格式

$$Y_{i+1} = Y_i + \mu(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, Y_i)(W_{i+1} - W_i)$$

Milstein 格式

$$\begin{aligned} Y_{i+1} = \quad & Y_i + \mu(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, Y_i)(W_{i+1} - W_i) \\ & \frac{1}{2}\sigma(t_i, Y_i)\sigma_x(t_i, Y_i)\left\{(W_{i+1} - W_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)\right\} \end{aligned}$$

其中

$$W_{i+1} - W_i = \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, n-1$$

而 $Z_1, \ldots, Z_n$ 是互相独立的标准正态随机变量

- `BM()`、`GBM()`、`BBridge()`
- `sde.sim()`

SDE的参数估计

考虑下面的 SDE：

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t;\theta)\mathrm{d}t + \sigma(X_t;\theta)\mathrm{d}W_t$$

其中 $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ 是 p 维参数， θ_0 是参数的真实值。函数 $\mu : \mathbb{R} \times \Theta \to \mathbb{R}$ 和$\sigma : \mathbb{R} \times \Theta \to (0, +\infty)$是已知的，并且使SDE的解存在。如果我们观测到该 SDE 解的一条轨迹的离散采样 $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ ，用这些数据来估计参数 θ ，得到参数的估计为 $\hat{\theta}$

SDE的参数估计

极大似然估计

假设 $x_0, x_1, \ldots, x_N$ 是 $X(t)$ 在均匀离散时刻 $t_i = \Delta t$ 的观测，其中 $i = 0, 1, \ldots, N$， $\Delta t = T/N$.
令 $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$ 是从 (t_{k-1}, x_{k-1}) 到 (t_k, x_k) 的传递概率密度，假设初始状态的概率密度为 $p_0(x_0|\theta)$，似然函数为：

$$f(\theta) = p_0(x_0|\theta) \prod_{k=1}^{N} p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$$

对数似然函数为：

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \log f(\theta) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \log p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) + \log p_0(x_0|\theta) \end{aligned}$$

考虑 SDE 的 Euler 近似，有

$$X(t_k) = x_{k-1} + \mu(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t + \sigma(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}\eta_k$$

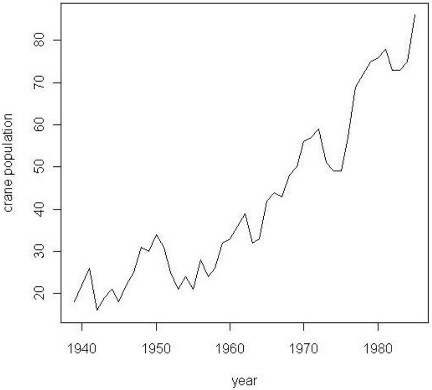
其中 $\eta_k \sim N(0,1)$.由上式可得

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} \exp\left(-\frac{(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

其中 $\mu_k = x_{k-1} + \mu(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$ ， $\sigma_k = \sigma(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}$

考虑美洲鹤1939－1985年的种群数据，假设 t 时刻种群大小 $X(t)$ 满足SDE：

$$\mathrm{d}X(t) = \theta_1 X(t)\mathrm{d}t + \theta_2\sqrt{X(t)}\mathrm{d}W(t), \qquad X(0) = 18$$



```
data<-scan("D:\\data.txt")
X<-ts(data,start=1939)

d <- function(t,x,theta) theta[1]*x
s <- function(t,x,theta) theta[2]*sqrt(x)


Euler.lik <- function(theta1,theta2){
  n <- length(X)
  dt <- deltat(X)
   -sum(dcEuler(X[2:n], dt, X[1:(n-1)], 0 ,c(theta1,theta2),
              d,s,log=TRUE))
}

fit<- mle(Euler.lik,start=list(theta1=0,theta2=1),
              method="L-BFGS-B",lower=c(0,0))
summary(fit)
```

参考文献

- Stefano M. Iacus.(2008). *Simulation and Inference for Stochastics Differential Euqations*. Springer
- Desmond J. Higham.(2001).*A Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastics Differential Euqations*.SIAM Review Vol.43 No.3. pp. 525–546
- E. Allen.(2007).*Modeling with Ito Stochastic Differential Equations*. Springer
- Chan,N. H,Wong, H. Y.(2006) *Simulation Techniques in Financial Risk Management*. Wiley,New York
- Back, K. (2005), *A Course in Derivative Securities: Introduction to Theory and Computation*. Springer, New York.
- Glasserman ,P.(2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag,New York

Thank You!